2 Fréquences, tableaux croisés et probabilités conditionnelles

1. Fréquences / proportions

A. Qu'est-ce qu'une fréquence (ou proportion) et comment la calculer ?

Exemple 2.1 On a une classe de 27 élèves. Parmi ces 27 élèves, 14 sont des filles. 27 est **l'effectif total**.
La **proportion** de filles est 14 filles sur 27 élèves : $p = \frac{14}{27}$
Si on calcule cette fraction, on a : $p \simeq 0,519$. Sous cette forme, on l'appellera une **fréquence** : la fréquence des filles est $p = 0,519$.
On peut aussi écrire ce nombre en **pourcentage** : $p = 0,519 = 51,9$ centièmes $= \frac{51{,}9}{100} = 51,9\%$.
La proportion $p = \frac{14}{27}$, la fréquence $p = 0,519$ et le pourcentage $p = 51,9\%$ sont trois écritures du **même nombre**.

Exercice 2.1 Transformer les fréquences en pourcentages et les pourcentages en fréquences :

Pourcentage	14%	$25,4\%$	....	....	$7,5\%$	....
Fréquence	....	....	$0,85$	$0,145$	....	$0,032$

Exercice 2.2 Pour calculer la proportion à partir de la fréquence 'ou du pourcentage) :
J'ai besoin de l'effectif total (nombre de personnes dans la classe) ; mettons que l'effectif est 35 élèves au total dans la classe.
Si je dis qu'il y a $34,3\%$ de filles, c'est $34,3\%$ *de* 35.
En maths, le mot "*de*" signifie "$\times$" , par exemple $\frac{1}{3}$ *de* $54 = \frac{1}{3} \times 54 = 18$.
Ici aussi, $34,3\%$ de 35 élèves, c'est $34,3\% \times 35$. Pour faire le calcul, on écrit le pourcentage sous forme décimale (fréquence) : $0,343 \times 35 \simeq 12$.
Il y a 12 filles dans la classe, donc la proportion est $\frac{12}{35}$

Fréquence/Pourcentage	0,25	0,064	$12,5\%$	51%	$0,04$	$1,5\%$
Proportion	....	....	....	....	....	....
Effectif total	87	125	57	74	145	48

Exercice 2.3 Bilan : compléter le tableau suivant :

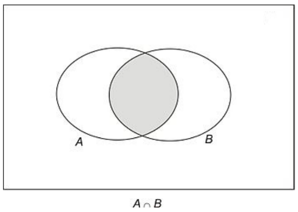
Proportion	$\frac{7}{15}$	$\frac{12}{56}$	....	....	....	....
Fréquence	....	....	0,47	0,39	....	....
Pourcentage	....	....	....	....	47%	$12,5\%$
Effectif total	15	56	50	75	62	81

Exercice 2.4 Application : $70,7\%$ des abonnés qui possèdent un forfait téléphonique au 1er trimestre 2023 ont choisi un forfait sans engagement, ce qui représente environ 37,1 millions d'abonnés.
Quel est, à l'unité près, le nombre total d'abonnés ayant un forfait téléphonique ?

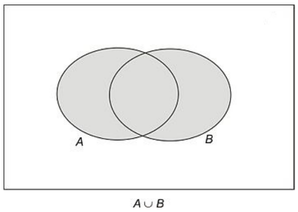
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B. Union et intersection

Soient A et B deux événements d'un univers Ω. Sur les schémas ci-dessous, l'univers Ω est représenté par le rectangle, et les événements A et B par des ovales.



Intersection



Union

Définition 2.1 :

- L' *intersection* de A et B est l'événement formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B. On le note $A \cap B$, et on dit "A inter B".
- La *réunion* de A et B est l'événement formé des issues qui réalisent **ou bien** l'événement A, **ou bien** l'événement B, **ou les deux**. On le note $A \cup B$, et on dit "A union B".

On remarquera qu'il y a une différence entre le "ou" du langage "quotidien" et le "ou" utilisé en mathématiques. Dans la vie courante, lorsque l'on dit "fromage ou dessert", on na peut pas avoir les deux : c'est un "ou" exclusif.
En mathématiques, le "ou" n'est pas exclusif : il signifie l'un, l'autre ou les deux.

Exercice 2.5 Dans un lycée de 2000 élèves, 800 sont des filles et 900 élèves font du foot, parmi lesquels 300 filles.

1. Faire le diagramme de Venn correspondant, en notant A l'ensemble des filles et B l'ensemble des élèves qui font du foot.

2. Que représente $A \cap B$ et combien y a-t-il d'individus ?
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Que représente $A \cup B$ et combien y a-t-il d'individus ?
   ....
   ....
   ....
   ....

Propriété 2.1 Quels que soient les événements A et B, on a :

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

Cette égalité est aussi vraie avec des fréquences ou des proportions.

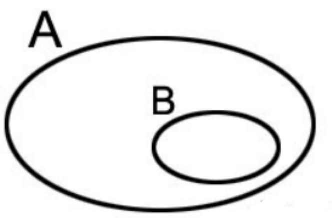
Exercice 2.6 Dans un lycée de 2000 élèves, 800 sont des filles et 900 élèves font du foot, parmi lesquels 300 filles.
Vérifier cette égalité avec les chiffres de l'exercice précédent.

....
....
....
....

Autre interprétation : On peut également écrire cette formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Dans ce cas, on peut dire que lorsque l'on considère $p(A) + p(B)$, "on compte deux fois $p(A \cap B)$" : une fois en tant que partie de A, et une autre fois en tant que partie de B. Cela permet d'interpréter la soustraction "$-p(A \cap B)$", qui vient "corriger" cela.

C. Inclusion

Définition 2.2 On dit que B est inclus dans A lorsque tous les éléments de B sont éléments de A.



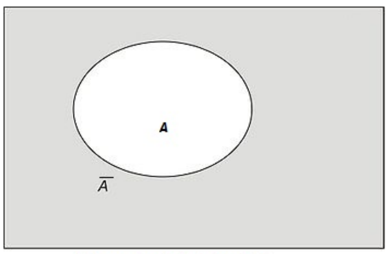
Exercice 2.7 Toujours avec l'exercice précédent, parmi les élèves qui font du foot, on note C l'ensemble de ceux qui jouent en club.
Écrire une inclusion correspondant à cette situation.

....
....
....
....

D. Complémentaire / Événement contraire

Définition 2.3 L'événement contraire d'un événement A est formé des issues qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$ et on dit "A barre".

Exemple 2.2 dans le cas d'un lancer de dé à 6 faces, sir A représente l'événement "obtenir un nombre pair", alors $\overline{A}$ représente l'événement "obtenir un nombre impair".



Evénement contraire de A, noté $\overline{A}$

Propriété 2.2 Pour tout événement A :
$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Exercice 2.8 Toujours avec l'exercice précédent, sachant que 200 élèves jouent en club, combien d'élèves font du foot sans pour autant jouer en club ? traduire cela en utilisant la notion d'événement contraire.

....
....
....
....

Exercice 2.9 Un club de fitness a 180 adhérents, parmi lesquels 45% sont inscrits à l'activité "Zumba" (notée Z), 40% à l'activité "Step" (noté S) et 10% pratiquent les deux. Le reste des adhérents pratique une autre activité.

1. Faire un diagramme de Venn correspondant à la situation

2. Déterminer l'effectif (nombre de personnes) de Z, de S et de $Z \cap S$
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Déterminer la fréquence ("pourcentage écrit en décimal") de Z, de S et de $Z \cap S$
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Avec la formule du cours, calculer la fréquence des membres inscrits à la Zumba, ou au Step (ou aux deux).
   ....
   ....
   ....
   ....
5. Déterminez la fréquence des adhérents qui ne pratiquent ni la Zumba, ni le Step.
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2.10 Un fabriquant d'appareils ménagers inspecte les 500 derniers appareils produits : 25 ont un défaut A et 19 ont un défaut B. Parmi les 500 appareils, 5 ont les deux défauts à la fois, les autres n'ont qu'un seul défaut.

1. Faire un diagramme de Venn correspondant à la situation

2. Calculer la proportion (donner une fraction) d'appareils inspectés ayant le défaut A *ou* le défaut B
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Tableaux croisés

Ce paragraphe servant principalement à introduire du vocabulaire, on travaillera sur un exemple.
On appelle **tableau croisé** un tableau comme celui qui est proposé ci-dessous.

Exercice 2.11 Compléter le tableau suivant :

	Femmes	Hommes	Total
Population pratiquant un sport	12 822		26 584
Population sédentaire		1 571	
Total			29 556

On appelle **fréquences marginales** les fréquences obtenues en divisant les effectifs inscrits dans chacune des cases du tableau précédent par la population totale.

Exercice 2.12 La population totale est : ....
Compléter le tableau ci-dessous en y inscrivant les fréquences marginales :

	Femmes	Hommes	Total
Population pratiquant un sport			
Population sédentaire			
Total			

On appelle **fréquences conditionnelles** les fréquences obtenues en divisant les effectifs inscrits dans chacune des cases du *premier* tableau précédent par *l'effectif de la ligne* correspondante (case de droite).

Exercice 2.13 Compléter le tableau ci-dessous en y inscrivant les fréquences conditionnelles :

	Femmes	Hommes	Total
Population pratiquant un sport			
Population sédentaire			
Total			

3. Probabilités conditionnelles

A. Définition et exemples

Exemple 2.3 On a regroupé dans le tableau suivant les pourcentages de filles et de garçons d'un club de sports suivant l'activité choisie (chaque adhérent pratiquant un et un seul sport) :

	Curling	Pétanque	Fléchettes
Filles	12	13	27
Garçons	16	12	20

1. On choisit au hasard un élève de ce club de sports. On note F l'événement « c'est une fille », et C l'événement « l'adhérent pratique le curling ». On a alors : $p(F) = \frac{52}{100} = 0,52$, $p(C) = 0,28$ et $p(F \cap C) = 0,12$.
2. On rencontre au hasard un adhérent de ce club et c'est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle pratique le curling ? Cette probabilité est $p = \frac{12}{52}$ (il y a 12 "curlingueuses parmi les 52 filles). On a donc : $p = \frac{12}{52} = \frac{0{,}12}{0{,}52} \simeq 0,23$. On dit que p est une *probabilité conditionnelle*. On note $p_F(C) = \frac{p(F \cap C)}{p(F)}$. On lit : probabilité de C sachant F.

Définition 2.4 Soit A et B deux événements d'un univers Ω. Si $p(B) \neq 0$, on appelle « probabilité de A sachant B » ou « probabilité de A si B » et on note $p_B(A)$ le nombre :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Exercice 2.14 On considère deux événements A et B d'un même univers tels que :
$P(A) = 0,1 \qquad P(B) = 0,2 \qquad$ et $P(A \cap B) = 0,01$
Avec la formule donnée dans la définition 2.4, calculer :

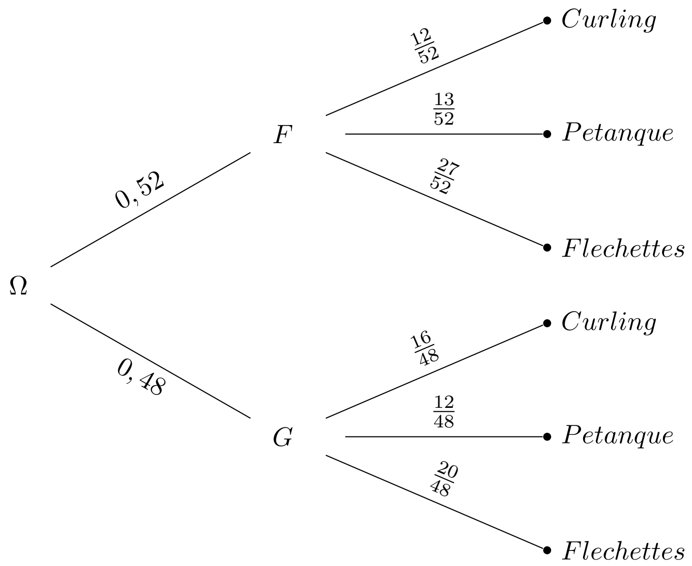
1. $P_B(A)$
2. $P_A(B)$

Exercice 2.15 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
On considère les événements suivants :
C : « La carte tirée est un cœur »
T : « La carte tirée est un trèfle »
R : « La carte tirée est rouge »
D : « La carte tirée est une dame »
F : « La carte tirée est une figure »

1. Déterminer $P_C(D)$
2. Déterminer $P_R(C)$
3. Déterminer $P(F \cap T)$
4. Déterminer $P(D \cup C)$
5. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une figure rouge ?
6. Sachant que la carte tirée est une dame, quelle est la probabilité que la carte soit un trèfle ?

B. Arbres pondérés

Exemple 2.4 On peut représenter la situation de l'exemple 2.3 par un arbre pondéré :



Sur chaque branche de l'arbre, la probabilité se rapporte à « l'univers du nœud précédent » ; ainsi, la probabilité $\frac{12}{52}$ est la probabilité de choisir une « curlingueuse » parmi les filles (l'univers de référence est l'ensemble des filles).

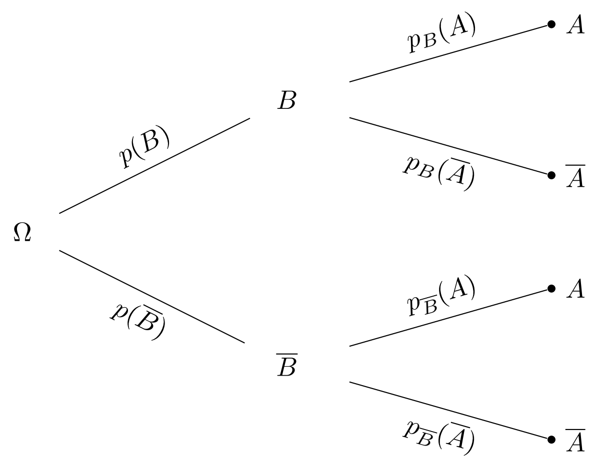
Règles de l'arbre pondéré : on considère l'arbre pondéré tracé ci-après. Les règles indiquées ci-dessous sont toujours vérifiées :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 :

$$p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1;$$

- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$



<u>Exercice</u> 2.16 Un disquaire range l'ensemble de ses CD en trois catégories :

- Les CD de variétés qui représentent 40% de l'ensemble et dont 75% sont des albums
- Les CD de pop-rock qui représentent 35% de l'ensemble et dont 80% sont des albums
- Les CD de classique-jazz qui représentent 25% de l'ensemble et dont 99% sont des albums

Le disquaire dispose de deux formats de CD : les albums et les deux-titres.
Un client prend un CD au hasard.

1. Traduire les informations données à l'aide d'un arbre pondéré

2. Quelle est la probabilité que le CD pris par le client soit un album ?
....
....
....
....
....

3. Sachant que le CD pris par le client est un album, quelle est la probabilité que ce soit un CD de classique-jazz ?
....
....
....
....
....

<u>Exercice</u> 2.17 *(exercice type Bac ....).*
Un internaute souhaite faire un achat sur internet. Quatre sites, un français, un allemand, un canadien, et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions (les initiales du pays désignent les événements ≪ L'achat s'effectue dans le pays ≫) :
$P(F) = P(A)\,;\qquad P(F) = \frac{1}{2}P(C)\,;\qquad P(C) = P(I)$

1. Traduire les informations données à l'aide d'un arbre pondéré

2. Calculer les probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....

3. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de l'événement S « l'internaute achète un supplément » :
   $P_F(S) = 0,2$; $P_A(S) = 0,5$; $P_C(S) = 0,1$; $P_I(S) = 0,4$
   (a) Compléter l'arbre pondéré de la question précédente avec ces probabilités.
   (b) Déterminer $P(S \cap A)$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   (c) Montrer que $P(S) = \frac{17}{60}$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   (d) L'internaute a acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2.18 (Sujet de Baccalauréat général série S, Antilles-Guyane juin 2016)
Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :
- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :
- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à $0,9305$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2.19 (Sujet de Baccalauréat général série S, Amérique du sud 2013)
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.
En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. (a) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Calculer $P(C)$. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ? ....
   ....
   ....
   ....
   ....